34

E.N.S.E.T. 1983

MATHEMATIQUES (4 h)

Section B' (programme T)

PRÉLIMINAIRES

1° Soient g une fonction continue sur $[a, b]$ et f une fonction continûment dérivable sur ce même intervalle $[a, b]$ telle que f' soit de signe constant. On désigne par G la primitive de g sur $[a, b]$ définie par : $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$. Montrer qu'il existe un nombre $\alpha \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = G(b)\,f(b) - G(\alpha)\,[f(b) - f(a)]\,.$$

En déduire la formule :

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(b)\int_\alpha^b g(t)\,dt + f(a)\int_a^\alpha g(t)\,dt\,.$$

(On pourra, si besoin est, admettre cette formule dans toute la suite du problème.)

2° a étant un réel strictement positif donné, démontrer la formule :

$$\lim_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \to \infty}} 2 \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2n+1}{(2n+1)^2 a^2 + 4k^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arctan} \frac{1}{a}\,.$$

3° Étudier la fonction :

$$x \rightsquigarrow \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} \qquad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\,.$$

On précisera notamment la position du graphe de cette fonction par rapport à celui de la fonction $x \rightsquigarrow x$. En déduire que la fonction φ définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $\varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ est décroissante (on pourra étudier φ'.)

4° Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$ telle que $|f(t)| \leqslant \frac{1}{t} \quad \forall\ t \in]0, +\infty[$. On suppose que, a et b étant deux réels donnés strictement positifs, la suite (s_n) de terme général $s_n = \int_0^{a+bn} f(t)\,dt$ est convergente. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et qu'on a :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{n \to \infty} s_n$$

(On pourra, par exemple, étudier sur l'intervalle $[a + bn,\ a + b(n+1)]$ la fonction $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.)

Dans les deux premières parties du problème, on se propose de calculer l'intégrale :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t}\,dt \qquad , x \text{ étant un réel positif ou nul.}$$

.../...

PREMIÈRE PARTIE : Existence et calcul de F (0).

1° Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin [(2n+1)\, t]}{\sin t}\, dt.$$

Montrer que I_n est indépendant de n et calculer la valeur commune de ces intégrales.

2° Montrer que :

$$\lim_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \to \infty}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}\right) \sin [(2n+1)\, t]\, dt = 0.$$

3° Déduire des questions précédentes que F (0) existe et que $F(0) = \frac{\pi}{2}$.

DEUXIÈME PARTIE : Existence et calcul de F (x).

1° Montrer que F (x) existe quel que soit x appartenant à $\mathbb{R}^+$.

2° a et b étant des constantes réelles données, calculer les intégrales :

$$J_{a,b} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-bt} \cos at\, dt.$$

3° Pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout réel $x \geqslant 0$, on pose :

$$K_n(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-(2n+1)xt} \frac{\sin [(2n+1)\, t]}{\sin t}\, dt.$$

Déterminer une expression de $K_n(x)$ en montrant que $\frac{\sin [(2n+1)\, t]}{\sin t}$ peut se mettre sous la forme d'une somme de cosinus.

4° Montrer que $\lim_{n \to \infty} K_n(x)$ existe pour tout x positif et déterminer cette limite.

Indication : on pourra, par exemple, écrire $K_n(x)$ sous la forme :

$$K_n(x) = A_n(x)\, e^{-(2n+1)x\frac{\pi}{2}} + B_n(x)$$

où $A_n(x)$ et $B_n(x)$ sont des expressions rationnelles.

5° Montrer que, pour x donné > 0 :

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right) e^{-(2n+1)xt} \sin [(2n+1)\, t]\, dt = 0.$$

6° Déduire, de ce qui précède, la valeur de F (x) pour tout $x > 0$. La fonction F est-elle continue au point $x = 0$ à droite ?

. . . / . . .

7° *a.* Calculer l'intégrale, pour K réel :

$$F_K(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin(Kt)}{t}\, dt \qquad \text{où } x \geqslant 0$$

et en déduire l'existence et la valeur, pour $x \geqslant 0$ de $\int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin^3 t}{t}\, dt$.

b. Généraliser le résultat précédent en calculant, pour $x \geqslant 0$ et pour tout entier $p > 0$, l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin^{2p+1} t}{t}\, dt.$$

Troisième partie

Dans cette partie, g est une fonction donnée continue et bornée sur $[0, +\infty[$ telle que :

a. $g(t)$ est équivalente à t au voisinage de 0;

b. La primitive G de g définie par : $G(x) = \int_0^x g(t)\, dt$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

1° Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{t}\, dt$ est convergente, (on pourra par exemple, utiliser une intégration par parties sur des intervalles convenables).

2° En étudiant l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}\right) g(nt)\, dt,$$

lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, montrer que l'on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{t}\, dt = \lim_{n \to \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g(nt)}{\sin t}\, dt.$$

3° Déduire de ce qui précède :

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ n \in \mathbb{N}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nt}{\sin t}\, dt$$

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ n \in \mathbb{N}}} n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t\, dt}{(1 + n^3 t^3) \sin t}.$$

FIN